MATEMÁTICA 4° MEDIO

Objetivo	Conceptos Claves
Aplicar el concepto de variable aleatoria discreta para analizar distribuciones de probabilidades en contextos diversos.	- Espacio muestral - Variable aleatoria discreta - Función probabilidad - Recorrido

Actividad 1

- Elaborar un glosario con los siguientes conceptos: espacio muestral, función probabilidad, experimento aleatorio, variable discreta.

Actividad 2

- Revisar lo expuesto en el **texto del estudiante (3° medio 2019)** y los ejercicios planteados (páginas 338 a la 342). Si no dispones del texto lee lo siguiente desarrolla los siguientes que le siguen.

Tabulando las probabilidades

En esta sección aprenderás

Qué es una función de probabilidad y una función de distribución. Aprenderás a graficar funciones de distribución, a calcular la esperanza y la varianza de una función de distribución.

Desarrollarás las siguientes habilidades:

- Identificar, calcular, interpretar, resolver problemas, analizar, sintetizar, investigar y comunicar.

Habilidades por actividad:

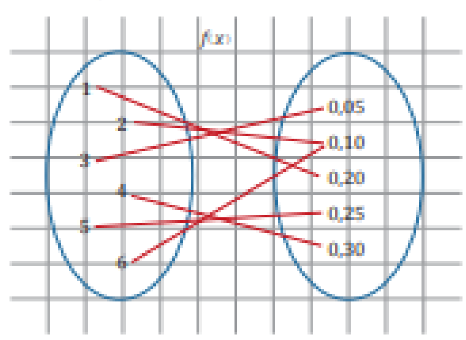
- Identificar y calcular: 1 – 2 – 3 – 4 – 6 – 7a – 7b – 7c – 7d – 7e – 8 – 9.
- Interpretar y resolver problemas: 5a – 5b – 10. 1 – 2a – 2b – 2c – 3 – 4a – 4b – 4c – 4d – 4e – 4f – 5a – 5c – 5d.
- Analizar y sintetizar: 5c – 7f. 4g – 5b – 5e.
- Investigar y comunicar: 2d.

Continuando con nuestro aprendizaje, vamos a determinar la estrecha relación que existe entre las probabilidades y las funciones.

Para ello, vamos a suponer que tenemos un dado cargado cuyas probabilidades son las siguientes:

Número del dado	Probabilidad
1	0,20
2	0,10
3	0,05
4	0,30
5	0,25
6	0,10

Podríamos definir una función que relacione la variable aleatoria "número de la cara mostrada por este dado al lanzarlo" con su probabilidad. Esta sería una función pues todos los números del dado tienen una y solo una probabilidad asignada. Podríamos representarla de la siguiente manera:



A esta función se le llama ***Función de probabilidades***.

Formalmente se define una función de probabilidades como aquella función que asocia a cada elemento del espacio muestral (x) de una variable aleatoria (X) la probabilidad que éste tenga.

Entonces, $f(x)$ será una función de probabilidad de tal manera que $f(x): \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$, tal que $f(x) = P(x)$, donde $P(x)$ es la probabilidad del elemento x del espacio muestral.

Por lo tanto, $f(x) = \begin{cases} P(X = x) & \text{si } x \in \text{ espacio muestral} \\ 0 & \text{si } x \notin \text{ espacio muestral} \end{cases}$

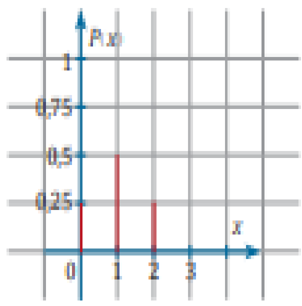
Hagamos algunos ejemplos sobre como establecer funciones de probabilidades:

1 Si se define la variable aleatoria "el número de hijos hombres que una pareja puede tener si tienen dos hijos", ¿cuál sería la función de probabilidad?

El espacio muestral correspondiente a esta situación es: $EM = \{HH, HM, MH, MM\}$, donde H corresponde a un niño y M corresponde a una niña.

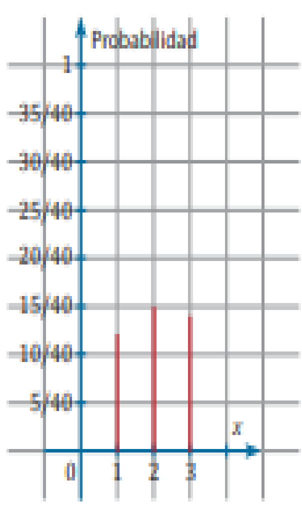
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4} & \text{con 0 o 2 hijos hombres} \\ \dfrac{1}{2} & \text{con 1 hijo hombre} \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

Además podemos graficarla también de la siguiente manera:



2 Si se tiene una urna con 12 bolitas rojas, 15 verdes y 13 azules y se define el suceso "sacar una bolita de la urna y ver su color". Determine la variable aleatoria asociada al problema y su función de probabilidad.

La variable aleatoria sería: el color de la bolita extraída. Como esta variable es cualitativa y el dominio de una función de probabilidad deben ser los números reales, entonces, le asignaremos un número a los posibles elementos del espacio muestral. Asignemos 1 al color rojo, 2 al verde y 3 al azul. Entonces, su función de probabilidad es la siguiente:



Ahora bien, si volvemos al ejemplo del dado cargado, podríamos mirar la tabla dada como una tabla de frecuencias y calcular la probabilidad "acumulada", veamos como interpretar esto:

Toma nota

Observa que:

- La suma de las probabilidades asignadas en una función de probabilidad debe ser igual a 1.
- El recorrido de la función es el intervalo [0,1] porque la probabilidad de un suceso varía entre 0 y 1, ambos incluidos.

Para entretenerse

Te desafiamos a que resuelvas estos entretenidos problemas utilizando las probabilidades.

http://platea.pntic.mec.es/jescuder/probabil.htm

Las bolitas son un objeto típico utilizado en experimentos para determinar probabilidades

Número del dado (x)	Probabilidad $P(X)$	Probabilidad acumulada $P(X \leq x)$
1	0,20	0,20
2	0,10	0,30
3	0,05	0,35
4	0,30	0,65
5	0,25	0,90
6	0,10	1,00

Por ejemplo, si queremos calcular la probabilidad de que al lanzar el dado, el número obtenido sea menor o igual a 3, entonces, ésta corresponderá 0,35 (3° fila de la probabilidad acumulada) y se anotará $P(x \leq 3)$.

Observa que, al calcular $P(x \leq 3)$, se puede deducir la probabilidad que x sea mayor que 3, es decir, $P(x > 3)$, ya que ésta es el complemento de la anterior, o sea $1 - 0{,}35$, que es 0,65.

De esta manera podremos definir una nueva función llamada Función de distribución que relaciona cada elemento del espacio muestral con la probabilidad acumulada hasta el valor dado.

Es decir, se define una **Función de Distribución Acumulada** como $F(x): R \rightarrow [0{,}1]$, de tal manera que $F(x) = P(X \leq x)$
En nuestro ejemplo, $F(3) = P(X \leq 3) = 0{,}35$
Hagamos otro ejemplo:

1 Si lanzamos dos dados y sumamos los puntos obtenidos en sus caras, determina:

a. la **función de distribución acumulada** correspondiente

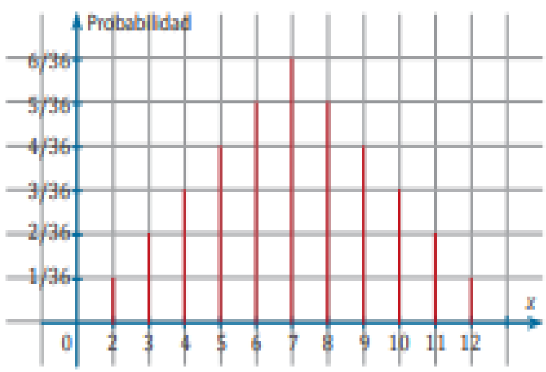
Suma de las caras	Probabilidad	Probabilidad acumulada
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
3	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$
4	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$
5	$\frac{4}{36}$	$\frac{10}{36}$
6	$\frac{5}{36}$	$\frac{15}{36}$
7	$\frac{6}{36}$	$\frac{21}{36}$
8	$\frac{5}{36}$	$\frac{26}{36}$

Toma nota

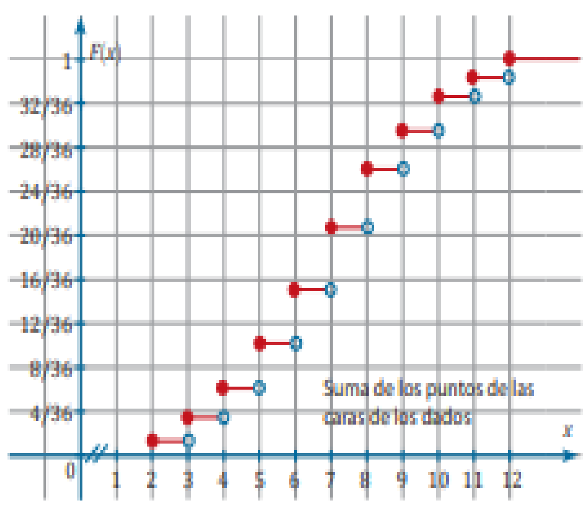
Nota que los valores de los elementos que no están en el espacio muestral y que, por lo tanto tienen probabilidad igual a cero, no se consideran en la tabla por efectos prácticos, ya que sería imposible considerarlos todos.

9	$\frac{4}{36}$	$\frac{30}{36}$
10	$\frac{3}{36}$	$\frac{33}{36}$
11	$\frac{2}{36}$	$\frac{35}{36}$
12	$\frac{1}{36}$	$\frac{36}{36}$

b. El gráfico de la función probabilidad



c. El gráfico de la función de distribución acumulada



d. La probabilidad de obtener una suma menor o igual que 5

$$F(5) = P(x \leq 5) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

e. La probabilidad de obtener una suma mayor a 10

$$P(x > 10) = 1 - P(x \leq 10) = 1 - F(10) = 1 - \frac{33}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

Toma nota

Observa que, la función de probabilidades está definida desde los números reales, al intervalo comprendido entre 0 y 1 inclusive, por lo tanto si tomamos todos los valores entre 0 y 1 por ejemplo, debieran estar representados en el gráfico con la probabilidad que le corresponde, pero no existen elementos del espacio muestral con estos valores (suceso imposible), entonces su probabilidad es 0, con lo que, en el gráfico no se distinguen del eje horizontal. De aquí que el gráfico de la función de probabilidades aparezca como un conjunto de líneas que destaca los valores de aquellos elementos del espacio muestral que tienen probabilidad distinta de 0.

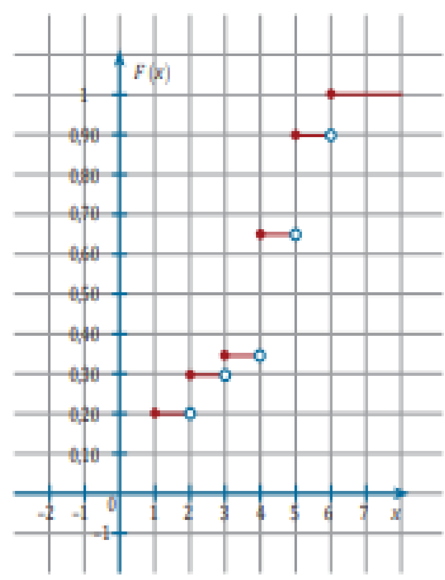
Toma nota

Observa que, al igual que para la función de probabilidad, la función de distribución acumulada está definida desde el conjunto de los números reales. Es decir, se deben considerar las probabilidades de todos los números reales comprendidos entre 2 y 3, por ejemplo. Como en este ejemplo, la probabilidad de estos valores es 0, entonces su probabilidad acumulada se mantendrá en el mismo valor que $F(2)$ en todo el intervalo. De manera análoga se repite esto en todos los intervalos restantes, esto hace que el gráfico de la función distribución tenga forma escalonada.

Para ilustrar de mejor forma la función de probabilidad la graficaremos también para nuestro ejemplo del dado cargado en el que teníamos los siguientes datos:

Número del dado (x)	Probabilidad $P(X)$	Probabilidad acumulada $P(X \leq x)$
1	0,20	0,20
2	0,10	0,30
3	0,05	0,35
4	0,30	0,65
5	0,25	0,90
6	0,10	1,00

Si graficamos estos datos en un gráfico de Función de distribución obtenemos:



- Una función de probabilidad se define como $f(x): \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$, tal que:

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x) & \text{si } x \in \text{ espacio muestral} \\ 0 & \text{si } x \notin \text{ espacio muestral} \end{cases}$$

- Una función de distribución acumulada se define como $F(x): \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$, de tal manera que:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

(Probabilidad acumulada hasta el valor x)

- La probabilidad de que x sea mayor que un cierto valor, se puede calcular como $P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F(x)$.

➢ Desarrollar los siguientes ejercicios:

1) Se lanza una moneda tres veces, para la variable aleatoria X: número de caras, encuentre:

a) el espacio muestral

b) el recorrido de la variable

c) la distribución de probabilidad

d) $P(X = 2)$

e) $P(X < 2)$

f) $P(X \geq 1)$

2) Se lanza dos dados y se define la variable aleatoria X: cantidad de números primos obtenidos, obtenga:

a) el recorrido de la variable aleatoria

b) la distribución de probabilidad

c) la gráfica de la distribución

d) el valor esperado

e) $P(X = 1)$

f) $P(X \leq 2)$

Consultas: César Carvajal González

Correo: matcdls@hotmail.com

Horario Plataforma: 8:00 – 11:00

Plazo de entrega: Lunes 6 de Abril